ECOLE NATIONALE DES INGENIEURS DES TRAVAUX RURAUX ET DES TECHNIQUES SANITAIRES

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES 1991

COMMUNE AUX DEUX OPTIONS

DURÉE: 1 HEURE

Les parties I et II sont indépendantes.

Les notations utilisées dans la première partie sont reprises dans la deuxième partie.

I Soient g une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, $(c,d) \in \mathbb{R}^2$, avec $c < d$, et $m = \frac{c+d}{2}$.

1°)Montrer que $\int_c^d g'(t)dt = \frac{d-c}{2}[g'(c)+g'(d)] + \int_c^d (m-t)g''(t)dt$.

2°)Démontrer, par exemple par récurrence, que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$:

$$g(d)-g(c) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(d-c)^k}{2^k k!}[g^{(k)}(c)+(-1)^{k-1}g^{(k)}(d)]+\int_c^d \frac{(m-t)^n}{n!} g^{(n+1)}(t)dt .$$

3°)Prouver que $\int_c^d \frac{|m-t|^n}{n!}dt = 2\int_c^m \frac{(m-t)^n}{n!}dt = \frac{(d-c)^{n+1}}{2^n(n+1)!}$.

Soit f une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et n dans $\mathbb{N}^*$.

4°)Montrer que $$\int_c^d f(t)dt = \sum_{k=1}^{n} \frac{(d-c)^k}{2^k k!}[f^{(k-1)}(c)+(-1)^{k-1}f^{(k-1)}(d)]+\int_c^d \frac{(m-t)^n}{n!} f^{(n)}(t)dt .$$

5°)Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, avec $a < b$, et soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pour $j \in \{0,\text{—},p\}$, on pose

$a_j = a + \frac{j(b-a)}{p}$ et, pour $j \in \{0,\text{—},p-1\}$, on pose $m_j = \frac{a_j+a_{j+1}}{2}$.

Enfin, on note $M_n = \sup\{|f^{(n)}(x)|,\ x \in [a,b]\}$ et $S_{n,p}$ la somme:

$$S_{n,p} = \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{2^k p^k k!}[f^{(k-1)}(a_j)+(-1)^{k-1}f^{(k-1)}(a_{j+1})]$$

a)Démontrer que $\left|\int_a^b f(t)dt - S_{n,p}\right| \le \frac{(b-a)^{n+1}M_n}{(n+1)!(2p)^n}$.

b)Justifier que: $$S_{n,p} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{2^k p^k k!}[f^{(k-1)}(a)+(-1)^{k-1}f^{(k-1)}(b)+(1+(-1)^{k-1})\sum_{j=1}^{p-1} f^{(k-1)}(a_j)] .$$

II Soit $f: x \in \mathbb{R} \longrightarrow f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

1°)Décomposer f en éléments simples sur $\mathbb{C}$.

2°)En déduire: $\forall\ n \in \mathbb{N},\ \forall\ x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x^2+1)^{n+1}} \operatorname{Im}[(x+i)^{n+1}]$.

où i désigne le nombre complexe canonique tel que $i^2 = -1$ et Imz la partie imaginaire du complexe z.

3°)Étudier le signe de $f^{(5)}(x)$ quand $x \in [0,1]$.

En déduire la valeur de $M_4 = \sup\{|f^{(4)}(x)|,\ x \in [0,1]\}$.

4°)Déterminer $p \in \mathbb{N}$ le plus petit possible tel que $\left|\frac{\pi}{4} - S_{4,p}\right| < 10^{-6}$.

FIN